Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2016-2017

ФИЗИКА

11 класс

II этап

Вариант 1

1. Шарик, изготовленный из алюминия, взвешивается на цифровых аналитических весах. Один раз взвешивание производится в сухом воздухе, второй раз – во влажном при относительной влажности 85%. Общее атмосферное давление в обоих случаях 100 кПа, температура - 20°C, давление насыщенного пара воды при 20°C – 2340 Па. При какой массе шарика можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность 0,1 мг? Плотность алюминия 2700 кг/м^3.

Решение:

Расхождение в показаниях весов - из-за того, что на груз действует сила Архимеда со стороны воздуха, а она в случае сухого и влажного воздуха будет разной (индекс с - сухой, в - влажный, Р - общее атмосферное давление, P_0 - давление насыщенного пара воды при 20°С, P_1- давление пара воды):

$$F_c = \rho_c Vg;\ F_в = \rho_B Vg$$

$$F_c - F_B = \Delta mg = Vg(\rho_c - \rho_B) => \Delta m = V(\rho_c - \rho_B) \qquad (1)$$ **(4 балла)**

Согласно уравнению состояния:

$$PV = \frac{m}{M}RT => P = \frac{\rho RT}{M} => \rho = \frac{PM}{RT}$$ **(1 балл)**

Для сухого воздуха:

$$\rho_c = \frac{P \cdot M_{возд}}{RT}$$

Для влажного воздуха:

$$\rho_в = \rho_{возд} + \rho_{пара}$$

$$\rho_{пара} = \frac{P_1 M_{пара}}{RT}; \quad \rho_{возд} = \frac{(P - P_1)M_{возд}}{RT}$$

$$=> \rho_в = \frac{P_1 M_{возд}}{RT} + \frac{(P - P_1)M_{возд}}{RT} = \frac{PM_{возд} - P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}$$ **(3 балла)**

Подставляем в (1):

$$\Delta m = V \cdot \left(\frac{P \cdot M_{возд}}{RT} - \frac{PM_{возд} - P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}\right) = V \cdot \frac{P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}$$

Отсюда:

$$V = \frac{\Delta m \cdot R \cdot T}{P_1(M_{возд} - M_{пара})}$$ **(3 балла)**

Подстановка:

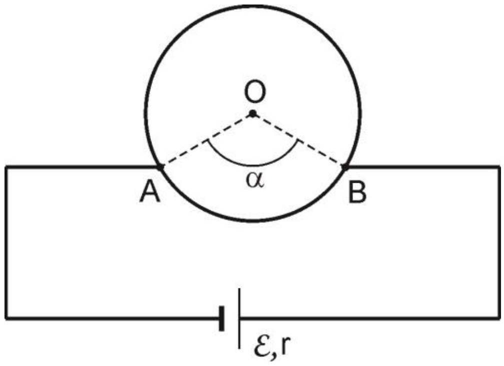
$$\varphi = \frac{P_1}{P_0} \cdot 100\% => P_1 = \frac{\varphi \cdot P_0}{100\%} = \frac{85 \cdot 2340}{100} = 1989 \text{ (Па)}$$

$$V = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{1989 \cdot (29 - 18)} = 10^{-7} \cdot 111{,}3 = 1{,}113 \cdot 10^{-5} (\text{м}^3)$$ **(2 балла)**

Масса шарика:

$$m = \rho_{Al} \cdot V = 2700 \cdot 1{,}113 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-2} (\text{кг}) = 30 (\text{г})$$ **(2 балла)**

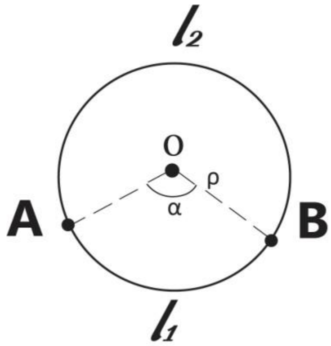
Ответ: 30 г



2. Из однородной проволоки с высоким сопротивлением сделали кольцо и присоединили его к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$=18 В и внутренним сопротивлением r=1 Ом так, как показано на рисунке. Когда угол α составил π/3 радиан, ток в цепи был 3 А. Определить угол α, если ток в цепи станет 6 А.

Решение:

Согласно закону Ома для полной цепи: $\varepsilon = I \cdot (r + R)$



Пусть полное сопротивление всей проволоки кольца равно R_0, тогда сопротивление единицы длины - $\frac{R_0}{2\pi \cdot \rho}$ (ρ - радиус окружности)

Тогда:

$$R_1 = \frac{R_0}{2\pi\rho} \cdot l_2;\ R_2 = \frac{R_0}{2\pi\rho} l_2$$ **(2 балла)**

Но:

$$l_1 = \rho\alpha;\ l_2 = \rho(2\pi - \alpha)(\alpha - \text{ угол в рад.}) => R_1 = \frac{R_0\alpha}{2\pi} \qquad R_2 = \frac{R_0(2\pi - \alpha)}{2\pi}$$ **(2 балла)**

Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, тогда

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\left[\frac{R_0^2\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2}\right]}{R_0} = \frac{R_0\alpha(2\pi - \alpha)}{4\pi^2}$$ **(2 балла)**

В первом случае $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

$$R = \frac{R_0}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5R_0}{36}$$ **(1 балл)**

По закону Ома:

$$18 = 3\left(1 + \frac{5R_0}{36}\right) => 5 = \frac{5R_0}{36} => R_0 = 36 (\text{Ом})$$ **(2 балла)**

Для текущего α таким образом:

$R = \frac{36\cdot\alpha(2\pi-\alpha)}{4\pi^2} = \frac{9}{\pi^2}\alpha\cdot(2\pi-\alpha)$ **(2 балла)**

Во втором случае:

$$18 = 6\cdot\left(1+\frac{9}{\pi^2}\alpha(2\pi-\alpha)\right) => 2 = \frac{9}{\pi^2}\alpha(2\pi-\alpha) =>$$

$$=> 2\pi^2 = 18\pi\alpha - 9\alpha^2 => 9\alpha^2 - 18\pi\alpha^2 + 2\pi^2 = 0$$

Решив это уравнение, получим:

$\alpha_{12} = \frac{9\pi\pm\sqrt{81\pi^2-18\pi^2}}{9} = \frac{9\pi\pm\pi\sqrt{63}}{9} \approx \left[\begin{matrix}\frac{17\pi}{9}\\ \frac{\pi}{9}\end{matrix}\right.$ **(3 балла)**

Нужно выбрать меньший корень (больший дополняет угол до 2π) **(1 балл)**

Ответ: новый угол составляет $\frac{\pi}{9}$ рад $\approx 20°$

3. По прямой железной дороге, располагающейся под углом α к длинной стене сплошного леса, движется поезд с постоянной скоростью ***v***. В тот момент, когда локомотив находится на расстоянии ***l*** от леса, машинист даёт короткий гудок. Через некоторое время машинист слышит эхо гудка, отражённое от леса. Скорость звука равна ***u***. Найдите: расстояние, которое проехал поезд с момента гудка до момента, когда машинист услышал эхо.

Решение:

Звук гудка идёт по пути *AOB*. Воспользуемся приёмом зеркального расположения источника звука (см. рисунок), тогда звук проходит такой же по длине путь, но только по прямой *A'OB*.

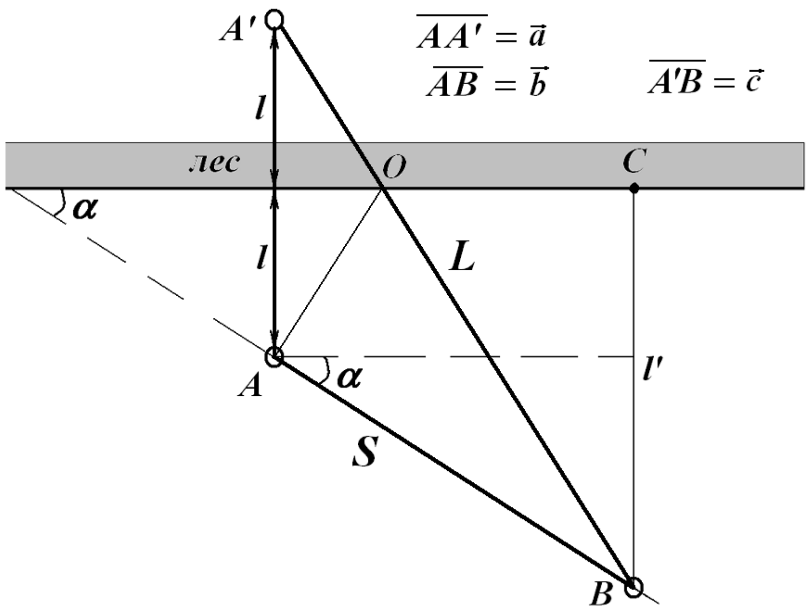


Рисунок **(3 балла)**

Согласно рисунку, расстояние *AA'* = 2*l*, ему соответствует вектор $\vec{a}$.
Пусть время, через которое с момента гудка машинист услышал эхо равно *t*.
Обозначим расстояние, которое пройдёт звук гудка со скоростью *u* за время *t*:

$A'B = L = u\cdot t$, вектор $\vec{c}$. (1) **(1 балл)**

Обозначим расстояние, которое пройдёт поезд со скоростью v за то же время t:

$AB = S = v \cdot t$, вектор $\vec{b}$. (2) **(1 балл)**

Угол между отрезками AA' и AB равен $\beta = 90° + \alpha$. **(1 балл)**

Из (1) и (2) выразим L через S: $\frac{L}{S} = \frac{u}{v}$; $L = \frac{u}{v} \cdot S$. (3) **(1 балл)**

По теореме косинусов: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, а модуль вектора c можно найти по формуле:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$.

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$L^2 = 4l^2 + S^2 - 2 \cdot 2l \cdot S \cdot \cos(90° + \alpha)$$ **(2 балла)**

С учётом (3) и $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$:

$$S^2 \frac{u^2}{v^2} = 4l^2 + S^2 + 4lS \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{u^2 - v^2}{v^2} S^2 - 4l \sin\alpha \cdot S - 4l^2 = 0$$ **(3 балла)**

Решая квадратное уравнение относительно S, получим:

$$S_{1,2} = \frac{4l \sin\alpha \pm \sqrt{16l^2 \sin^2\alpha + 16l^2 \left(\frac{u^2 - v^2}{v^2}\right)}}{2\left(\frac{u^2 - v^2}{v^2}\right)} =$$

$$= \frac{4lv^2 \sin\alpha \pm \frac{4lv^2}{v}\sqrt{v^2 \sin^2\alpha + (u^2 - v^2)}}{2(u^2 - v^2)} =$$ **(2 балла)**

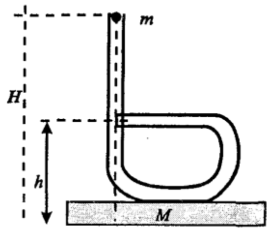
$$= \frac{2lv^2 \sin\alpha \pm 2lv\sqrt{u^2 - v^2(1 - \sin^2\alpha)}}{(u^2 - v^2)}$$

Выбираем решение со знаком «+», и окончательно получаем:

$$S = 2lv \frac{v \sin\alpha + \sqrt{u^2 - v^2 \cdot \cos^2\alpha}}{(u^2 - v^2)}$$ **(1 балл)**

Ответ: $\boxed{S = 2lv \frac{v \sin\alpha + \sqrt{u^2 - v^2 \cdot \cos^2\alpha}}{(u^2 - v^2)}}$

4. На горизонтальном столе стоит подставка, на которой закреплена тонкая жёсткая изогнутая трубка (рисунок). Масса подставки с трубкой равна $\boldsymbol{M}$. Верхний конец трубки расположен на высоте H над столом. Высота горизонтального участка трубки над столом $\boldsymbol{h}$, а её конец лежит на одной вертикали с серединой верхнего конца. В верхний конец опускают без начальной скорости небольшой шарик массы $\boldsymbol{m}$. Найти высоту H верхнего конца трубки над столом, если расстояние, которое пролетел шарик по горизонтали после вылета из трубки до падения на стол равно $\boldsymbol{S}$. Трением пренебречь.



Решение:

Перед вылетом из трубки шарик некоторое время двигался горизонтально. Так как, по условию задачи, на систему трубка с подставкой и шарик никакие внешние силы в горизонтальном направлении не действуют, то на основании закона сохранения импульса центр масс трубки с подставкой и шарика должен сохранять своё положение в горизонтальном направлении до тех пор, пока шарик не упадёт на стол. Следовательно, в момент вылета шарика из трубки координата шарика по горизонтали должна быть такой же, что и в момент опускания шарика в верхний конец трубки. **(3 балла)**

По закону сохранения импульса, импульс шарика и подставки с трубкой равны по модулю и имеют противоположные направления:

$$mv = MV\,. \quad (1)$$ **(1 балл)**

Так как, система «шарик – подставка с трубкой» консервативна, то выполняется закон сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$ **(2 балла)**

Расстояние, которое пролетел шарик по горизонтали после вылета из трубки до падения на стол равно:

$$S = vt\,. \quad (3)$$ **(1 балл)**

За это время шарик упал с высоты h на стол:

$$h = \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$ **(1 балл)**

Из (4) выразим время, подставим его в (3):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad S = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (5)$$ **(1 балл)**

Из (5) выразим v, из (1) выразим V, и подставим всё в (2):

$$v = S\sqrt{\frac{g}{2h}}, \qquad V = \frac{m}{M}v = \frac{m}{M}S\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$ **(2 балла)**

$$mgH = \frac{m}{2} \cdot \frac{g}{2h} S^2 + mgh + \frac{M}{2} \cdot \frac{g}{2h} \cdot \frac{m^2}{M^2} S^2,$$

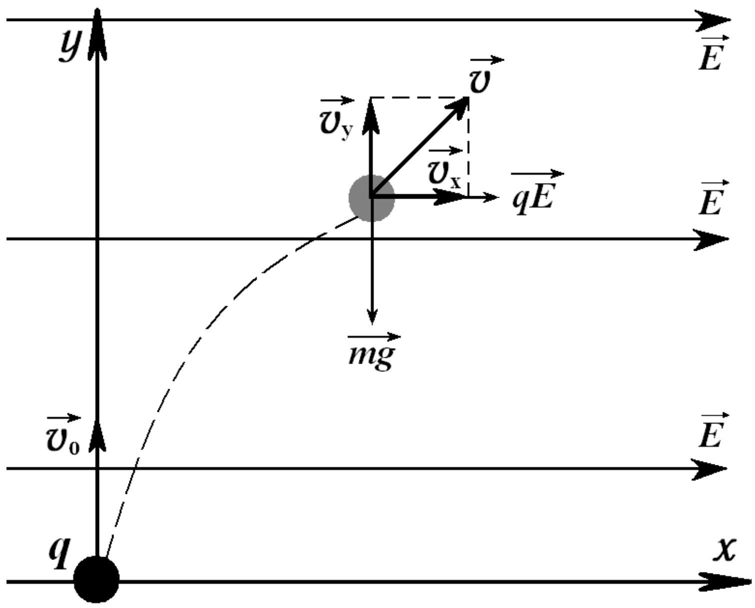
$$H = \frac{S^2}{4h} + h + \frac{S^2}{4h} \cdot \frac{m}{M},$$

$$H = \frac{S^2}{4h}\left(1 + \frac{m}{M}\right) + h.$$ **(4 балла)**

Ответ: $\boxed{H = \frac{S^2}{4h}\left(1 + \frac{m}{M}\right) + h}$

5. Маленький заряженный шарик массой ***m*** и зарядом ***q***, запускают вертикально вверх с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ в горизонтальном электрическом поле с напряжённостью ***E***. Определите, какой путь по горизонтали от места запуска пролетел шарик к моменту времени, когда его скорость была минимальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:



Правильный рисунок **(2 балла)**

Сначала найдём момент времени, в который полная скорость шарика будет минимальной.

Из рисунка видно, что полный вектор скорости в любой момент времени определяется по теореме Пифагора через проекции на оси *x* и *y*:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (1)$$ **(3 балла)**

По горизонтали на заряженный шарик действует сила со стороны электрического поля, сообщая ему ускорение:

$$a_x = \frac{qE}{m}.$$ **(1 балл)**

По вертикали на шарик действует сила тяжести, сообщая ему ускорение:

$$a_y = g. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Зависимости проекций вектора скорости от времени:

$$v_x = a_x \cdot t = \frac{qE}{m} \cdot t, \qquad v_y = v_0 - g \cdot t. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Подставим последние выражения в (1):

$$v = \sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t^2 + v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Для нахождения момента времени, когда полная скорость шарика будет минимальной, возьмём производную по времени от последнего выражения и приравняем её нулю (исследуем на экстремум):

$$v_t' = \frac{2\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t - 2v_0g + 2g^2t}{2\sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t^2 + v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2}} = 0. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Так как, время принимает конечное значение, то выражение (2) может равняться нулю, только за счёт числителя:

$$2\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t - 2v_0g + 2g^2t = 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Выражаем время:

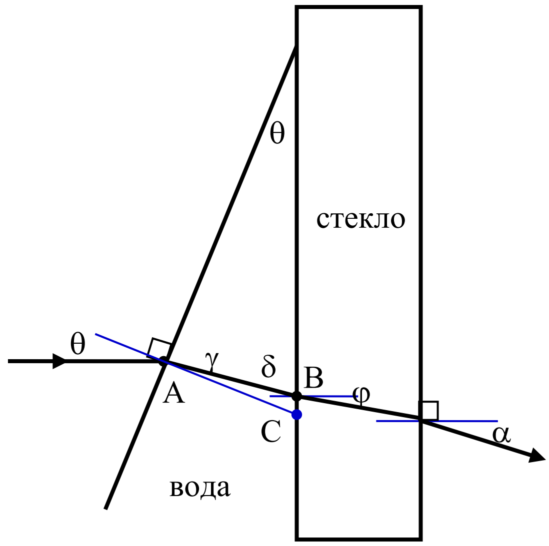
$$t = \frac{v_0gm^2}{(qE)^2 + (mg)^2}. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Зная это время, нетрудно найти пройденный по горизонтали путь:

$$x = \frac{a_xt^2}{2} = \frac{\frac{qE}{m}\left(\frac{v_0gm^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\right)^2}{2} = \frac{qEv_0^2g^2m^3}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^2}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $\boxed{x = \frac{qEv_0^2g^2m^3}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^2}}$

6. Наблюдатель, находящийся в помещении на расстоянии 3 м от окна, покрытого снаружи множеством мелких водяных капель, видит на нём светлое пятно радиусом 10 см от очень далёкого фонаря, расположенного на одном уровне с наблюдателем. Определите, какой максимальный угол составляет поверхность капель с поверхностью стекла. Показатель преломления воды 4/3. Дифракцию света на каплях не учитывать.



Решение.

Так как фонарь расположен очень далеко от окна, то можно считать, что приходящие от него лучи света параллельны. Максимальный угол, на который отклоняется свет от прямой из-за преломления в каплях, приближенно равен $\alpha \approx \frac{r}{L} = \frac{0{,}1}{3} = \frac{1}{30} \ll 1$, т.е. угол мал, поэтому и все остальные углы тоже будут малы. Следовательно, при решении задачи можно пользоваться приближенным соотношением $\sin x \approx x$. **(4 балла)**

Светлое пятно на стекле возникает из-за преломления света на поверхности капель. Пусть поверхность капель составляет с поверхностью стекла угол θ. (см. рисунок). Рассмотрим луч, который падает на участок капли вблизи стекла. Малый участок капли можно приближенно считать плоским. Поэтому задача сводится к преломлению света на клине. **(3 балла)**

Пусть

θ - угол падения луча света на каплю (вода);

γ - угол преломления на границе воздух-вода;

δ - угол падения луча на границе вода-стекло;

φ - угол преломления на границе вода стекло;

α - угол преломления на границе стекло воздух.

Связь между углами θ, γ и δ найдем из треугольника ABC ($\angle A = \gamma$, $\angle B = 90^\circ + \delta$, $\angle C = 90^\circ - \theta$):

$$\gamma + 90^\circ + \delta + 90^\circ - \theta = 180^\circ,$$

$$\gamma + \delta = \theta. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

По закону преломления:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\gamma} = \frac{n_в}{1} \text{ или } \frac{\theta}{\gamma} \approx \frac{n_в}{1} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx n_в \gamma;$$ **(2 балла)**

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varphi} = \frac{n_{ст}}{n_в} \text{ или } \frac{\delta}{\varphi} \approx \frac{n_{ст}}{n_в} \quad \Rightarrow \quad n_{ст}\varphi \approx n_в \delta.$$ **(2 балла)**

Выразим γ и δ и подставим в (1):

$$\gamma = \frac{\theta}{n_в}, \quad \delta = \frac{n_{ст}\varphi}{n_в},$$

$$\frac{\theta}{n_в} + \frac{n_{ст}\varphi}{n_в} = \theta,$$

$$\theta - \frac{\theta}{n_в} = \frac{n_{ст}\varphi}{n_в},$$

$$\theta = \frac{n_{ст}\varphi}{n_в - 1}.$$ **(3 балла)**

При преломлении света на ближней к наблюдателю поверхности стекла справедливо выражение $n_{ст}\varphi \approx \alpha$. Тогда угол θ:

$$\theta = \frac{\alpha}{n_в - 1} = \frac{r}{L(n_в - 1)} = 0{,}1 \text{ рад} \approx 6^\circ.$$ **(4 балла)**

Ответ: 6°